MA2 – „písemná" přednáška 27. 4. 2020

Minulou „přednášku" jsme skončili výpočtem integrálu

$$I = \iint_{\omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$, kde integrační oblast ω je kruh

se středem v počátku k.s.s. a poloměru $R (>0)$. Při výpočtu integrálu pomocí Fubiniho věty jsme se dostali k nepříjemným „složitým" integrálům, bylo vidět, že kartézské souřadnice při výpočtu integrálu úplně, s kruhem moc „neladí".

Pomohla naše fyzikální interpretace integrálu – – výpočet hmotnosti kruhové desky (zanedbatelné tloušťky), jejíž hustota je $\rho(x,y) = x^2+y^2$, tj. „stejná" na kružnicích o středu v počátku – a dále pomohl „Newtonův postup" k integrálu a „zdravý" rozum; rozdělili jsme kruh na „proužky" o poloměru $r \in (0,R\rangle$ šířky dr o hustotě $\rho(r) = r^2$, pak hmotnost „proužku" byla $dm = \rho(r)\,2\pi r\,dr$, tj. $dm = r^2 \cdot 2\pi r\,dr$ a hmotnost pak $m = \int_0^R dm = \int_0^R r^2 2\pi r\,dr$

(tak asi existuje integrál ve fyzice).

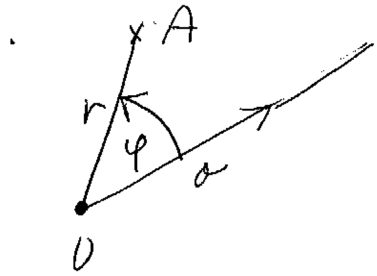
A dále:

Z hlediska „probíraného" dvojného integrálu (a Riemannova postupu k integrálu) je užitečné a dobré vědět, co je za tímto výpočtem integrálu I skryto, neboť asi ne u každého integrálu bude vidět tak jednoduché převedení integrálu dvojného na integrál $\int_a^b f$, jako v našem jednoduchém úvodním příkladu.

jsou to „jiné" souřadnice bodu v rovině, vhodnější pro popis „kulatých" oblastí – a to <u>souřadnice polární</u>

(s polárními souřadnicemi jsme už pracovali v diferenciálním počtu):

Zvolíme pól <u>O</u> – bod v R^2 a polární osu <u>o</u>, a každému bodu



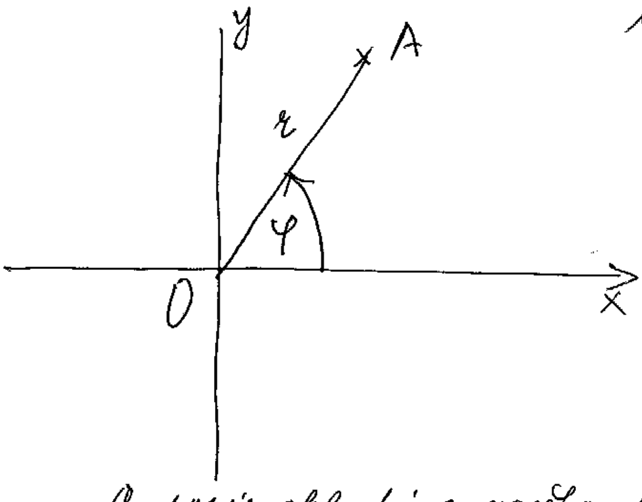
$A \in R^2$ můžeme přiřadit jeho vzdálenost v R^2 od O, $r \geq 0$ a úhel, který svírá „spojnice" bodu O a A s osou <u>o</u>, tj. φ, pokud $r > 0$,

$A = A(r, \varphi)$ pro $r > 0$,

je-li $r = 0$, φ není definováno;

tedy $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, je-li $A \neq O$

Jsou-li v rovině zadány i kartézské souřadnice, pak volíme <u>O</u> – počátek k.s.s. a osu <u>o</u> – kladnou poloosu x, a pak,



když $A \neq O$, $A[x, y]$ v kartézských souřadnicích, platí:

$$x = r\cos\varphi, \quad r \in (0, +\infty)$$
$$y = r\sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi)$$

A popis oblasti z našeho příkladu:

$\omega_{xy} = \{[x, y] \in R^2;\ x^2 + y^2 \leq R^2, R > 0\}$ v k.s.s.

a

$\omega_{r,\varphi} = \{[r, \varphi] \in R^2;\ 0 < r \leq R;\ 0 \leq \varphi < 2\pi\} = (0, R\rangle \times \langle 0, 2\pi)$

(počátek „vypadl" z $\omega_{r,\varphi}$, ale jeden bod integrál „nezmění")

Máme-li v rovině kartézské souřadnice, pak integrál

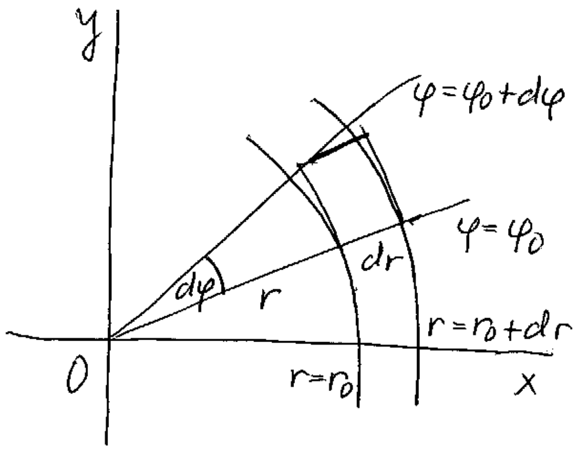
(R) $\iint\limits_{\omega} f(x,y)\,dx\,dy$ je limitou Riemannových integrálních součtů

$\sigma(f, D, \{(\xi_i, \eta_j)\}) = \sum\limits_i \sum\limits_j f(\xi_i, \eta_j)\,\Delta_i x\, \Delta_j y$ – a pro vytvoření součtu dělíme oblast ω (přesněji vnoření do obdélníku O, $\omega \subset O$) na obdélníčky přímkami $x = konst$, $y = konst$..

V případě souřadnic polárních je to analogické – oblast budeme „dělit" přesněji křivek daných rovnicemi

$r = konst.$ ($r > 0$) – kružnice o středu 0 a poloměru $r > 0$

a $\varphi = konst$ ($\varphi \in \langle 0, 2\pi)$) – polopřímka s počátečním bodem 0;



popišme si „dělení" ω na „v limitním provedení", tj. s „dr" a „$d\varphi$" (viz obrázek) –

– pro integrální součty potřebujeme velikost plochy dílčího „kousku" –

– a můžeme tento „kousek" nahradit (je „malý") obdélníkem (přibližně stejného obsahu) –

– a náhradní obdélníček (oblouky nahradíme zřejmě nejlépe tečnami – viz diferenciální počet) má strany dr a $rd\varphi$ (délka oblouku o poloměru r a úhlu φ), tedy, část ω, tj. „$d\omega$", je „$d\omega = r d\varphi \cdot dr$", a pak

$$\iint\limits_{\omega_{xy}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{\omega_{r\varphi}} r^2 . \underbrace{r\,dr\,d\varphi}_{\text{„}d\omega\text{"}}$$

(zde „zkráceno" do zakázaného tvaru bez limity R-součtů – snad „nevadí"!)

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Nyní má je asi vidět obecný návod pro transformaci souřadnic kartézských ve dvojném integrálu na integraci pomocí souřadnic polárních (ω_{xy} vyjadřuje „popis" ω v k.s.s., $\omega_{r\varphi}$ v souřadnicích polárních):

$$(1) \qquad \iint_{\omega_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\omega_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

Obecně se říká – substituce ve dvojném integrálu do polárních souřadnic.

A podíváte-li se do skript (nebo i jiné literatury), dočtete se:

Máme-li transformaci kartézských souřadnic do polárních,

$$(*) \quad \begin{cases} x(r,\varphi) = r\cdot\cos\varphi & ,\ r \in (0,+\infty) \\ y(r,\varphi) = r\sin\varphi & ,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi) \end{cases},$$

pak Jacobiho matice je $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\varphi), & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(r,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\varphi), & \frac{\partial y}{\partial \varphi}(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{pmatrix}$,

(bylo v dif. počtu)

a označme-li $J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix}$ – Jacobián zobrazení $(*)$

(determinant Jacobiho matice)

platí:

$$(2) \qquad \iint_{\omega_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\omega_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,|J(r,\varphi)|\,dr\,d\varphi$$

pro ω_{xy}-měřitelnou a $f \in R(\omega_{xy})$.

Návody (1) a (2) pro substituci ve dvojném integrálu do polárních souřadnic se neliší (následně), neboť

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = r$$

. Je asi „dobré" trochu vysvětlit, jak se ten Jacobián $J(r,\varphi)$ v integrálu „objeví" – a jak to souvisí s tou naší cestou ke vzorci (1) – i po „naší cestě" jsme blízko, stačí celkem „snadný" krok a dostaneme se k tomu Jacobiánu – a pomůže to pak k pochopení obecného tvrzení o substituci v dvojném (a pak i v trojném) integrálu.

Zřejmě Jacobián $J(r,\varphi)$ souvisí s výpočtem velikosti té „malé" plošky, vzniklé při dělení oblasti ω při integraci:

Transformace do polárních souřadnic je vlastně vektorové zobrazení z $(0,\infty)\times\langle 0,2\pi)$ do R^2:

$$\underline{\begin{array}{l} x(r,\varphi) = r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) = r\sin\varphi \end{array}}\;, \qquad \begin{array}{l} x(r,\varphi) \in C^{(1)}((0,+\infty)\times\langle 0,2\pi)) \\ y(r,\varphi) \in C^{(1)}(\quad \text{–"–} \quad) \end{array}$$

(1) <u>pro $r=r_0$ máme kružnici</u> $(\varphi\in\langle 0,2\pi))$ (kružnici o poloměru r_0)

$$\begin{array}{l} x(\varphi) = r_0\cos\varphi \\ y(\varphi) = r_0\sin\varphi \end{array} \quad \text{pak} \quad \left.\begin{array}{l} x'(\varphi) = -r_0\sin\varphi \\ y'(\varphi) = r_0\cos\varphi \end{array}\right\} \text{ je tečný vektor v } [r_0,\varphi]\,;$$

$\vec{\tau}_\varphi(\varphi_0) = (x'(\varphi_0), y'(\varphi_0))$ je tečný vektor v bodě $[r_0,\varphi_0]$ a

<u>$\tau_\varphi(\varphi_0)\,d\varphi = (x'(\varphi_0), y'(\varphi_0))\,d\varphi$</u> je vektor, který je tečný k oblouku našeho kousku při dělení oblasti ω a tak je vlastně stranou „náhradního" obdélníčku (aproximujícího plošku „křivou"),

Tedy, jedna „strana" obdélníčku (aproximujícího část v podělení) je vektor $\underline{(-r_0 \sin\varphi_0,\ r_0 \cos\varphi_0)\, d\varphi}$;

(ii) podobně, pro $\varphi = \varphi_0$ dostáváme polopřímku s parametrizací

$$\begin{matrix} x(r) = r\cos\varphi_0 \\ y(r) = r\sin\varphi_0 \end{matrix}\ ,\ r>0 \text{ a pak } \begin{matrix} x'(r) = \cos\varphi_0 \\ y'(r) = \sin\varphi_0 \end{matrix}$$

je tečný vektor (a zde i směrový dané polopřímky)

a tak máme i druhou stranu příslušného obdélníčku –
– tj. vektor $\underline{(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)\cdot dr}$

A když jsme probírali determinant matice, jedna aplikace (na závěr) byla výpočet obsahu rovnoběžníka (v rovině), jehož strany jsou různoběžné vektory $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2)$:

$$S = \left|\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}\right|$$

(determinanty matice a matice transponované se rovnají).

Tedy zde: plocha „elementární části" $d\omega$ (vektory stran jsou v (i)(ii)),

je dána absolutní hodnotou determinantu

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_0\, dr, & -r_0 \sin\varphi_0\, d\varphi \\ \sin\varphi_0\, dr, & r_0\cos\varphi_0\, d\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_0, & -r_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0, & r_0\cos\varphi_0 \end{vmatrix} dr\cdot d\varphi =$$

$= J(r_0, \varphi_0)\, dr\, d\varphi$ – a toto je tedy ve vzorci
(a doufám, že i teď vidíte, že se takto počítá „plocha" při polárních souřadnicích)

A před příklady na užití substituce do polárních souřadnic uvedeme ještě obecné známé věty o substituci ve dvojném integrálu:

<u>Def.:</u> Nechť je dáno zobrazení $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, které zobrazuje množinu $O_{uv} \subset R^2$ do množiny $O_{xy} \subset R^2$, můžeme psát
$$\phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v)) = (x,y),$$
takové, že

(i) ϕ je prosté na O_{uv}, O_{uv} – oblast;

(ii) $\phi \in C^{(1)}(O_{uv})$ (tj. ϕ_1, ϕ_2 mají v O_{uv} spojité parciální derivace 1. řádu);

(iii) Jacobián zobrazení ϕ, tj.
$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u,v), & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ v } O_{uv};$$

Takové <u>zobrazení ϕ s vlastnostmi (i)–(iii) se nazývá regulární zobrazení</u>.

<u>Pak platí: Věta (o substituci ve dvojném integrálu):</u>

Nechť $f \in R(\omega_{xy})$, $\omega_{xy} \subset R^2$ je měřitelná oblast a nechť $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ je regulární zobrazení, $\phi(\omega_{uv}) = \omega_{xy}$ (ω_{uv} – měřitelná oblast). Pak
$$\iint_{\omega_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\omega_{uv}} f(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

Příklady užití substituce do polárních souřadnic.

1. **Obsah kruhu o poloměru $R>0$ (snadný výpočet)**

$\omega_{xy} = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le R^2\}$, $(= K_{xy}(R)$ – budeme značit kruhy$)$

$\omega_{r\varphi} = \{[r,\varphi];\ 0<r\le R;\ 0\le\varphi<2\pi\}$ $(= K_{r\varphi}(R))$

(přesně vzato – v $\omega_{r\varphi}$ „chybí" přímka, ale pro dvojné integraci, jeden bod, když chybí, „nevadí" – viz věta o existenci $\iint_\omega f$)

$$\underline{S(K(R))} = \iint_{K_{xy}(R)} dx\,dy = \iint_{K_{r\varphi}(R)} r\,dr\,d\varphi \underset{F.V.}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\,dr =$$

(míra oblasti ω = $\iint_\omega 1\,dx\,dy$)

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \underline{\pi R^2}$$

2. **Máme „zkontrolovat", že objem kužele o poloměru základny $R>0$ a výšce $v=R$ je $V=\frac{1}{3}\pi R^3$:**

(i) „model" (pro výpočet):

kuželová plocha daných vlastností je graf funkce $f(x,y) = R - \sqrt{x^2+y^2}$, a kužel v příkladu je pak oblast

$\Omega = \{[x,y,z];\ 0\le z\le R-\sqrt{x^2+y^2}\}$, tj.

základna $\omega_{xy} = \{[x,y];\ \sqrt{x^2+y^2}\le R\} = K(R)$, a budeme integrovat fci $f(x,y) = R-\sqrt{x^2+y^2}$ v $\omega_{xy} = K(R)$

(pro výpočet objemu), tedy:

$$V(\Omega) = \iint\limits_{K(R)_{xy}} \left(R - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy \underset{\substack{\text{polární}\\ \text{souřadnice}}}{=} \iint\limits_{K(R)_{r,\varphi}} (R-r)\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

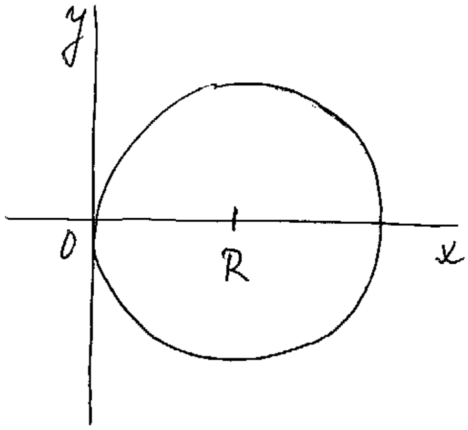
$$K(R)_{r,\varphi} = \{ [r,\varphi] ;\ 0 < r \leq R ;\ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R-r)\cdot r\,dr = 2\pi \int_0^R (R\cdot r - r^2)\,dr = 2\pi \left[R\cdot\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_0^R$$

$$= 2\pi \left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{\pi R^3}{3} \quad (\text{cbd}).$$

3. Určete moment setrvačnosti homogenního kruhu vzhledem k ose, jdoucí (kolmo k rovině kruhu) bodem na obvodu kruhu.

Vzorec pro moment setrvačnosti, aplikovaný pro naši úlohu, lze si představit takto – budeme počítat J pro oblast



$$\omega_{xy} = \{ (x,y) ;\ (x-R)^2 + y^2 \leqq R^2 \}$$

vzhledem k počátku s.s.
(hustota je $\rho = \text{konst}$), pak obecně

$$J = \iint\limits_{\omega_{xy}} d^2(x,y)\,\rho(x,y)\,dx\,dy \ \Longrightarrow \ (\text{zde pro } \omega_{xy})$$

($d(x,y)$ je vzdálenost bodu (x,y) od osy)

$$J = \iint\limits_{\omega_{xy}} (x^2+y^2)\cdot\rho\,dx\,dy \underset{\text{pol. s.}}{=} \rho \iint\limits_{\omega_{r,\varphi}} r^2\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

– pěkné – ale potřebujeme ještě „popis" $\omega_{r\varphi}$!

$(x,y) \in \omega_{xy} \Leftrightarrow \quad (x-R)^2+y^2 \leqq R^2$, tj.

$$x^2-2xR+\cancel{R^2}+y^2 \leqq \cancel{R^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \leqq 2xR \quad (*)$$

a převedeme-li „$(*)$" do souřadnic polárních ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ pro $r>0$)

pak $\quad r^2 \leqq 2r\cos\varphi R \quad (a \quad r>0) \Rightarrow 0<r \leqq 2\cos\varphi \cdot R$ –

a máme tedy meze pro r: $\quad 0<r \leqq 2R\cos\varphi$

a odtud i pro φ (neboť $\cos\varphi>0$ dá :) $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$

(„φ" může být i v jiných intervalech než v $\langle 0, 2\pi)$ díky periodicitě $\cos\varphi$)

tj. $\quad \omega_{r\varphi}=\{(r,\varphi);\quad 0<r \leq 2R\cos\varphi\ ,\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\}$

a zároveň je odsud vidět, „jaké bude pořadí integrace ve Fubiniho větě" – protože meze pro r závisí na φ (v našem vyjádření $\omega_{r\varphi}$), integrace „přes" r bude integrací vnitřní: tedy

$$\underline{J}=\rho\iint_{\omega_{xy}}(x^2+y^2)\,dx\,dy \underset{\text{polár.}}{=} \rho\iint_{\omega_{r\varphi}} r^2 \cdot r\,dr\,d\varphi=\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^3\,dr=$$

$$=\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2R\cos\varphi} d\varphi=\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4R^4\cos^4\varphi\,d\varphi \underset{\text{(sudá fce)}}{=} 8R^4\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=$$

$$=8\rho R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi=2\rho R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=2\rho R^4\left(\left[\varphi+\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi\right)=2\rho R^4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left[\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=2\rho R^4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\frac{3}{2}\pi R^4}$$

A fyzikální poznámka:

Moment setrvačnosti v této úloze lze spočítat i dle Steinerovy věty:

$$J = J_T + m d_T^2$$

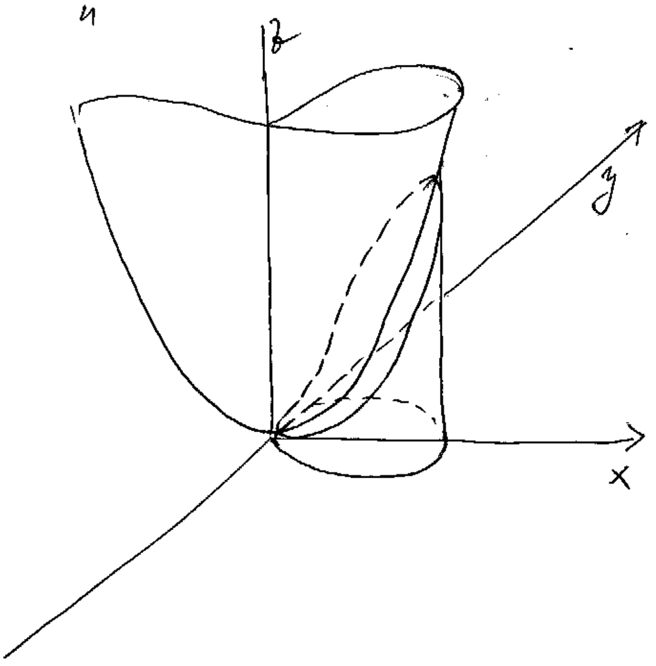
(J_T – moment setrvačnosti vzhledem k ose, jdoucí těžištěm a $m d_T^2$ je moment setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti m, umístěného v těžišti, vzhledem k ose rotace)

Zde tedy: $$J_T = \rho \iint_{K(R)} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \rho\pi \frac{R^4}{2}$$

(neboť kruh je homogenní, tedy těžiště je střed kruhu) a hmotnost kruhu je $\rho \cdot \pi R^2$ a $d_T = R$ (těžiště má souřadnice $T = [R,0]$), tedy

$$J = \rho\pi \frac{R^4}{2} + \rho\pi R^2 \cdot R^2 = \frac{3}{2}\rho\pi R^4 \quad \text{(opět!)}$$

A „geometricky" lze náš příklad interpretovat jako výpočet objemu oblasti $\Omega \subset R^3$, která je ohraničená rovinou $z=0$, rotačním paraboloidem o rovnici $z = x^2+y^2$ a válcovou plochou o rovnici $(x-R)^2+y^2=R^2$



– tedy integrujeme funkci $f(x,y) = x^2+y^2$, a obor integrace je „nosič" ω_{xy}.

4. Vypočti $\iint\limits_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$: (K(R) – kruh o středu v počátku a poloměru R)

Představit si můžeme opět objem oblasti Ω, která je „zdola" ohraničena rovinou $z=0$, shora rotační plochou, která je grafem funkce $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ (rotační plocha, která vznikne rotací grafu $f(x)=e^{-x^2}$ kolem osy z) a válcovou plochou $x^2+y^2=R^2$.

Budeme-li chtít počítat v kartézských souřadnicích a užít Fubiniho větu, pak bude „zle", neboť:

$$\iint\limits_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \underset{F.V.}{=} \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy =$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-x^2} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-y^2}\,dy$$

– ale (bez důkazu) jsme si řekli, že primitivní funkci k $f(x)=e^{-x^2}$ nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí (i když existuje) – tedy „neumíme"!

Ale užitím souřadnic polárních – jde počítat „krásně":

$$\iint\limits_{K(R)_{xy}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint\limits_{K_{r\varphi}(R)} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} e^{-r^2}\cdot r\,dr =$$

$$= 2\pi \left[\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-r^2}\right]_0^R = -\frac{2\pi}{2}\left(e^{-R^2}-1\right) = \underline{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}$$

(zde Jacobián „r" posloužil jako derivace vnitřní fce u 1VS !)

5. <u>Zkuste analogicky i</u>

$$\iint_{K(R)} \sin(x^2+y^2)\,dxdy \quad . \text{ nebo}$$

$$\iint_{\omega} \sin(x^2+y^2)\,dxdy\,, \quad \omega = \{(x,y)\in R^2;\ \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$$

nebo $\displaystyle\iint_{\omega} \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, kde $\omega =$ —"— .

A ještě jedna poznámka – povšimněte si „podobnosti" vzorců
(píšu zde „bez" předpokladů – jde o „princip")

<u>1. věta o substituci u funkce jedné proměnné</u>

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \qquad (x=\varphi(t))$$

a

$$\iint_{\omega_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\omega_{uv}} f(\overbrace{x(u,v),y(u,v)}^{\Phi(u,v)})\,|J(u,v)|\,dudv\,,$$

$$((x,y) = (x(u,v),y(u,v)) = \Phi(u,v))$$

$$\varphi((\alpha,\beta)) = (\varphi(\alpha),\varphi(\beta)) \quad (\text{pro } \varphi'(t)>0)$$

a $\Phi(\omega_{uv}) = \omega_{xy}$,

a místo jedné derivace $\varphi'(t) \longrightarrow$ „nastupuje" u dvou proměnných Jacobián – „vždy" parciální derivace „transformace" $\Phi(u,v)$, tj. vektorového zobrazení $\Phi(u,v) = (\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))$.

5. „Kontrola" vzorce pro výpočet objemu koule o poloměru $R>0$:

Koule $\Omega(R) = \{[x,y,z]\,;\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$

(pro výpočet objemu jsme zvolili střed koule v počátku).

Pak objem můžeme počítat jako $2\times$ objem „polokoule"

$$\Omega_{1/2} = \{[x,y,z];\quad x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \text{ a } z \geq 0\}$$

Pak $V(\Omega_{1/2}) = \iint\limits_{K(R)} \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, neboť:

($K(R)$ značí kruh o středu v počátku a poloměru $R>0$)

ze vztahu $x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \Rightarrow z^2 \leq R^2-(x^2+y^2)$, tj.

$$|z| \leq \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$$

a $z \geq 0$ dá: $\quad 0 \leq z \leq \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$

a užijeme základní aplikaci dvojného integrálu pro výpočet objemu oblasti, ohraničené kladnou (nezápornou) funkcí „na oblasti" $\omega \subset \mathbb{R}^2$, zde $\omega_{xy} = K(R)$ – dostaneme tuto informaci „matematicky" z podmínky $0 \leq R^2-(x^2+y^2)$, tj. $x^2+y^2 \leq R^2$, nebo díky „zdravému rozumu".

A opět výpočet nebude pěkný v kartézských souřadnicích (můžete si vyzkoušet). A tedy se obrátíme na souřadnice polární: zde $\omega_{r\varphi} = \{(r,\varphi)\,;\ 0<r\leq R,\ \varphi\in\langle 0,2\pi)\}$

a integrujeme (na další straně):

$$V(\Omega) = 2\iint\limits_{K_{x,y}(R)} \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 2\iint\limits_{K_{r,\varphi}(R)} \sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr = 4\pi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr = \left|\begin{array}{l} R^2-r^2 = t \\ -2r\,dr = dt \\ r=0 \to t=R^2 \\ r=R \to t=0 \end{array}\right|$$

$$= -\frac{4\pi}{2}\int_{R^2}^{0} \sqrt{t}\,dt = -\frac{4\pi}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_{R^2}^{0} = \underline{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

6. <u>Zkuste sami – objem tělesa</u> (tj. omezené oblasti $\Omega \subset R^3$), které je ohraničené plochami $z = x^2+y^2$ (tj. rotačním paraboloidem) a plochou o rovnici $x^2+y^2+z^2=6$ (tj. kulovou plochou o středu v počátku)

(„návod" – $V(\Omega) = \iint\limits_{K(\sqrt{2})} \left(\sqrt{6-(x^2+y^2)} - (x^2+y^2)\right)dx\,dy$

a užijte polární souřadnice k výpočtu integrálu. A promyslete i „model").